

1. Telaah konsep

- (a) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat dihitung dengan aturan L'Hôpital jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \text{_____}$ atau _____ dan $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada atau bernilai tak hingga (atau negatif tak hingga).
- (b) Jika syarat pada (a) terpenuhi, maka dengan aturan L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{_____}$.
- (c) Aturan L'Hôpital tidak dapat digunakan untuk menghitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x)}{x - 1}$ karena _____ .
- (d) Misalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$. Untuk menghitung $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$ dengan menggunakan aturan L'Hôpital, kita tuliskan $f(x)g(x) = \text{_____}$ atau _____ .
- (e) Integral tak wajar $\int_1^{\infty} f(x) dx$ dikatakan konvergen jika $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx \text{ _____}$.
- (f) Integral tak wajar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ divergen jika _____ atau _____ divergen.
- (g) Walaupun $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x dx = \text{_____}$, integral tak wajar $\int_{-\infty}^{\infty} x dx \text{ _____}$.
- (h) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ konvergen jika dan hanya jika p bernilai _____ .
- (i) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ konvergen jika dan hanya jika p bernilai _____ .
- (j) Untuk menentukan kekonvergenan integral tak wajar $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$, kita tuliskan $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx = \text{_____}$.

2. Di antara limit-limit berikut, tentukan mana yang merupakan bentuk tak tentu.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1} x}{\sqrt{x}}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2^x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x + e^x)}$

3. Di antara limit-limit berikut, tentukan mana yang merupakan bentuk tak tentu.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{1}{x} \right)$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^{1/x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) \ln(\sin x)$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

4. Hitunglah limit-limit berikut.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^3}$ (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x^2}{x^5 + 2x^3}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - (3x + 1)}{x^2}$ (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 7}{x^2 + \ln(x^3)}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x) - x}{x^4 + x^3}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\pi/2) - \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x}}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^3}{x^2 - 1}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x - \sin(\pi x)}$

5. Misalkan $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos x}, & \text{jika } x \neq 0, \\ a, & \text{jika } x = 0. \end{cases}$

Tentukan nilai a agar f kontinu di $x = 0$.

6. Hitunglah limit-limit berikut.

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^4)}{x + 1}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^5}{3^x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cot(\pi x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{2 + 3 \tan x}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ (h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1 - x} \right)$

7. Hitunglah limit-limit berikut.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + x)^{1/x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

8. Tentukan semua asimtot datar dari fungsi-fungsi berikut.

- (a) $f(x) = \frac{e^x - x}{e^x + 1}$ (b) $g(x) = xe^{-x^2}$

9. Penggunaan aturan L'Hôpital secara langsung tidak membantu penghitungan nilai limit-limit berikut. Jelaskan mengapa, kemudian temukan cara lain untuk menghitung limit-limit tersebut.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}} \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + 1}$$

10. Manakah di antara integral-integral berikut yang merupakan integral tak wajar? Berikan alasan Anda (nilai integral tidak perlu dihitung).

$$(a) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (e) \int_0^{\pi/4} x \cot^2 x dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x-4} dx \quad (f) \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$$

$$(c) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \quad (g) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$(d) \int_0^{\pi} \tan x dx \quad (h) \int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 3} dx$$

11. Periksa apakah integral tak wajar berikut konvergen atau divergen. Jika konvergen, hitung nilainya.

$$(a) \int_0^{\infty} x e^{2x^2} dx \quad (e) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(4x+3)}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{16+x^4} dx \quad (f) \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$(c) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx \quad (g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$$

$$(d) \int_0^{\infty} \cos x dx \quad (h) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$$

12. Periksa apakah integral tak wajar berikut konvergen atau divergen. Jika konvergen, hitung nilainya.

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{x^{9/10}} dx \quad (d) \int_0^{\pi/2} \tan^3 t dt$$

$$(b) \int_6^8 \frac{dx}{(x-7)^{4/3}}$$

$$(c) \int_{-1}^2 \frac{4}{4-x^2} dx \quad (e) \int_0^3 \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

13. Periksa kekonvergenan integral tak wajar berikut. Jika konvergen, hitung nilainya.

$$(a) \int_0^2 \frac{2x}{x-1} dx \quad (c) \int_0^4 \frac{4}{\sqrt{4x-x^2}} dx$$

$$(b) \int_0^2 \frac{1}{x(2-x)} dx \quad (d) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

14. Suatu daerah **terbuka** di kuadran pertama terletak di bawah kurva $y = e^{-x}$.

- Tentukan luas daerah tersebut.
- Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah tersebut mengelilingi sumbu- y .
- Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah tersebut mengelilingi sumbu- x .

15. Tentukan semua nilai p sehingga integral berikut konvergen.

$$(a) \int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^p} dx \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$$

16. Tentukan turunan fungsi berikut di $x = 0$ menggunakan definisi turunan dan Teorema L'Hopital.

$$(a) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

17. Tentukan limit berikut.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}$$

18. Misalkan $f(x) = (1+2^x)^{1/x}$. Tentukan semua asimtot datar dan asimtot tegak dari grafik $y = f(x)$.

19. Misalkan $f(x) = e^{-x^2}$ dan $g(x) = e^{-x}$.

- Tunjukkan bahwa untuk $x \geq 1$, berlaku

$$0 < f(x) \leq g(x).$$

- Periksa kekonvergenan dari $\int_1^{\infty} g(x) dx$.
- Apa yang dapat disimpulkan mengenai kekonvergenan $\int_1^{\infty} f(x) dx$ dengan menggunakan hasil pada (a) dan (b)?