

- Telaah konsep
  - Persamaan parabola dengan puncak titik  $(0, 0)$ , melalui  $(4, 2)$ , dan terbuka ke kanan adalah \_\_\_\_\_.
  - Misalkan  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang mempunyai turunan kontinu dan  $f'(t) \neq 0$ . Jika  $x = f(t)$  dan  $y = g(t)$ , maka  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.
  - Vektor satuan yang searah dengan vektor  $\mathbf{u}$  adalah \_\_\_\_\_.
  - Dua buah vektor ortogonal jika dan hanya jika hasil kali titik kedua vektor tersebut \_\_\_\_\_.
  - Salah satu vektor normal bidang  $Ax + By + Cz = D$  adalah \_\_\_\_\_.
  - Hasil kali silang dari vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  di ruang selalu \_\_\_\_\_ terhadap  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$ .
  - Jika  $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$  dengan  $f$  dan  $g$  fungsi yang mempunyai turunan di setiap bilangan real, maka  $\mathbf{F}'(t) =$  \_\_\_\_\_ dan  $\int \mathbf{F}(t) dt =$  \_\_\_\_\_
  - Vektor arah dari garis dengan persamaan parametrik  $x = at + x_0, y = bt + y_0, z = ct + z_0$  adalah \_\_\_\_\_
- Untuk masing-masing persamaan berikut, tentukan apakah persamaan tersebut merupakan persamaan parabola, elips atau hiperbola kemudian sketsa grafiknya.
  - $4x^2 + 3y = 0$
  - $4x^2 + y^2 = 16$
  - $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
  - $x^2 + 4(y + 1)^2 = 4$
  - $y^2 + 4y + 3x - 8 = 0$
  - $y^2 - 2x^2 + 4x + 6 = 0$
- Persamaan parameter dari kurva diberikan sebagai berikut. Tentukan persamaan Cartesius dari kurva dan gambarkan sketsa kurva.
  - $x = 2t, y = 4t^2 + 1, -\infty < t < \infty$
  - $x = t, y = -\sqrt{t}, t \geq 0$
  - $x = t, y = \sqrt{1 - t^2}, -1 \leq t \leq 0$
  - $x = \sqrt{t + 1}, y = \sqrt{t}, t \geq 0$
  - $x = 1 + \sin t, y = 2 \cos t - 2, 0 \leq t \leq \pi$
  - $x = 2 \sec t, y = 3 \tan t, -\pi/2 < t < \pi/2$
- Tentukan persamaan garis singgung terhadap kurva pada nilai  $t$  yang diberikan. Kemudian tentukan juga nilai  $d^2y/dx^2$  di titik tersebut.
  - $x = t, y = \sqrt{t}, t = 1/4$
  - $x = 4 \sin t, y = 2 \cos t, t = \pi/4$
  - $x = t + e^t, y = 1 - e^t, t = 0$
  - $x = \frac{1}{t-1}, y = \frac{t}{t+1}, t = 2$
  - $x = 1/t, y = -2 + \ln t, t = 1$
- Tentukan semua titik pada kurva dengan persamaan paramter  $x = 4 \sin t + 1, y = 3 \cos t - 1, 0 \leq t \leq 2\pi$  yang memiliki garis singgung yang sejajar dengan sumbu- $y$ .
- Hitunglah integral berikut
  - $\int_0^1 (x^2 - 4y) dx$  dengan  $x = t + 1, y = t^3 + 4$ .
  - $\int_1^9 xy dy$  dengan  $x = t, y = t^3 + 1$ .
- Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh
  - parabola  $x = 2t + 1, y = t^2, -\infty < t < \infty$ , sumbu- $x$  dan garis  $x = 3$ .
  - setengah elips  $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$  dan sumbu- $x$ .
  - setengah hiperbola  $x = \tan t, y = 2 \sec t, -\pi/2 < t < \pi/2$  dan garis  $y = 4$
- Misalkan vektor  $\mathbf{u} = \langle -1, 2, 2 \rangle$  dan  $\mathbf{v} = \langle 3, 4, 0 \rangle$ . Tentukan
  - $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
  - $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
  - $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$
  - $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$
  - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
  - $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
- Misalkan  $\mathbf{u} = \langle -4, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle$ , dan  $\mathbf{w} = \langle 1, 4 \rangle$ . Hitung
  - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
  - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
  - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
  - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
  - $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$
  - $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$
- Tentukan sudut antara vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dengan vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  diberikan sebagai berikut.
  - $\mathbf{u} = \langle 2, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 0, 3 \rangle$ .
  - $\mathbf{u} = \langle -1, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6 \rangle$
  - $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 0, 1, -1 \rangle$
- Misalkan  $\mathbf{u} = \langle 1, 4, 3 \rangle$ . Tentukan suatu vektor tak nol  $\mathbf{v}$  agar  $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ 
  - bernilai 0
  - bernilai maksimum
  - bernilai minimum.
- Misalkan  $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 0, -1 \rangle$ , dan  $\mathbf{w} = \langle 1, 5, -3 \rangle$ . Tentukan
  - $\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$
  - $\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w}$
  - $\text{proj}_{\mathbf{u}} (\mathbf{w} - \mathbf{v})$
  - $\text{proj}_{\mathbf{u}} (\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w})$
- Misalkan  $\mathbf{u} = \langle -3, 2, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 2, -4 \rangle$ , dan  $\mathbf{w} = \langle 7, 3, -4 \rangle$ . Tentukan
  - $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
  - $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
  - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
  - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- Tentukan semua vektor yang tegak lurus dengan vektor  $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$  dan  $\mathbf{v} = \langle -1, 1, 2 \rangle$ .

15. Tentukan suatu vektor satuan yang tegak lurus dengan bidang yang memuat titik  $(4, 0, 1)$ ,  $(1, 3, 5)$ , dan  $(3, -1, 2)$ .

16. Tentukan luas segitiga dengan titik-titik sudut

(a)  $P(3, 2, 1)$ ,  $Q(2, 4, 6)$ ,  $R(-1, 2, 5)$ .

(b)  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(2, 0)$ .

Petunjuk: Pandang titik  $(a, b)$  di bidang sebagai titik  $(a, b, 0)$  di ruang.

17. Tentukan persamaan bidang yang memenuhi masing-masing informasi berikut:

(a) Melalui  $(1, 1, 1)$  dengan vektor normal  $\mathbf{n} = \langle 0, 1, -1 \rangle$

(b) Melalui  $(2, 0, -1)$  dan sejajar bidang  $x - y + 2z = 2$ .

(c) Melalui  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, -1, 1)$ , dan  $(-1, 1, 0)$

(d) Melalui  $(1, 2, -1)$  dan tegak lurus garis  $x = 1 - t$ ,  $y = 3 + 2t$ ,  $z = 2t$ .

(e) Melalui  $(1, 2, 1)$  dan tegak lurus dengan bidang  $-x + y + z = 2$  dan  $x + y - z = 1$ .

18. Tentukan persamaan parameter dari garis yang memenuhi masing-masing informasi berikut

(a) Melalui  $(-1, 2, -1)$  dan sejajar dengan vektor  $\langle 1, -2, 4 \rangle$

(b) Melalui  $(1, 0, -2)$  dan  $(2, 3, -5)$

(c) Melalui  $(2, -1, 1)$  dan tegak lurus dengan bidang  $x + 3y - 3z = 2$

(d) Melalui  $(2, 1, -3)$  dan sejajar dengan garis dengan persamaan parameter  $x = 1 - t$ ,  $y = 4 + 2t$ ,  $z = 3 - 3t$

(e) Melalui  $(0, 3, -1)$  dan tegak lurus dengan kedua garis  $x = 1 + t$ ,  $y = 3 + t$ ,  $z = 2 - 2t$  dan  $x = 1 + t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $z = 1 - 2t$

(f) Merupakan perpotongan bidang  $x - y - z = 1$  dan  $x + y - z = 4$

19. Periksa apakah pasangan garis di bawah berpotongan, sejajar atau tidak keduanya.

(a)  $x = 3 + 2t$ ,  $y = -1 + 4t$ ,  $z = 2 - 4t$  dan  $x = 3 - t$ ,  $y = 2 - 2t$ ,  $z = -5 + 2t$ .

(b)  $x = 2 - t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 1 + t$  dan  $x = 5 + 2t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 8 + 3t$ .

(c)  $x = 2 - t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 1 + t$  dan  $x = 5 + 2t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = t$ .

20. Hitunglah limit fungsi bernilai vektor berikut (jika ada)

(a)  $\lim_{t \rightarrow 1} \left\langle 2t - 3, \frac{4}{\sqrt{t} + 3} \right\rangle$

(b)  $\lim_{t \rightarrow 2} \left\langle \frac{t}{t^2 - 4}, \frac{t}{t^2 + 1} \right\rangle$

(c)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{t + 1}, \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sin t \cos t}{t} \right\rangle$

(d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{t}{t + 1}, \frac{\ln(1 + t)}{\sqrt{t}}, \frac{\sin t \cos t}{t} \right\rangle$

21. Tentukan turunan dari fungsi berikut

(a)  $\mathbf{F}(t) = \langle t^3, \ln 2t \rangle$

(b)  $\mathbf{G}(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \mathbf{i} + (\sin 2t) \mathbf{j} + e^{t^2} \mathbf{k}$

22. Diberikan dua fungsi bernilai vektor

$\mathbf{F}(t) = \langle 1, t^2 + 1, t \rangle$  dan  $\mathbf{G}(t) = \langle \cos(t), 1, \sin(2t) \rangle$ .

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut

(a)  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t) + 2\mathbf{G}(t)$

(b)  $\mathbf{H}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{G}(t)$

(c)  $h(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)$

Catatan: ini **bukan** fungsi bernilai vektor.

(d)  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$

(e)  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(e^t)$

23. Vektor  $\mathbf{r}(t)$  merupakan vektor posisi dari suatu partikel di ruang pada waktu  $t$ . Tentukan kecepatan dan percepatan partikel. Kemudian tentukan laju dan arah gerak partikel pada waktu  $t$  yang diberikan.

(a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t + 1, t^2 - 1, 2t \rangle$ ,  $t = 1$

(b)  $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + (4t + 1) \mathbf{k}$ ,  $t = \pi/2$

24. Tentukan persamaan parameter garis singgung kurva di ruang dengan persamaan parameter  $x = 2t^2 - 1$ ,  $y = -4t$ ,  $z = t^3$  di titik  $(7, 8, -8)$ .

25. Hitung integral berikut

(a)  $\int_0^1 \langle 2t, e^{4t}, -\cos 3t \rangle dt$

(b)  $\int_1^4 \left( 3s \mathbf{i} + 6s^2 \mathbf{j} + \frac{1}{s} \mathbf{k} \right) ds$

26. Suatu benda dilemparkan dari posisi awal  $\mathbf{r}(0) = 14 \mathbf{i} + 10 \mathbf{k}$  dengan kecepatan awal  $\mathbf{v}(0) = 3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$ . Diketahui bahwa benda bergerak dengan percepatan konstan  $\mathbf{a}(t) = -10 \mathbf{k}$ .

(a) Tentukan kecepatan benda setiap saat.

(b) Tentukan posisi benda setiap saat.

(c) Tentukan kapan benda tersebut mencapai tanah.

(d) Tentukan posisi benda tersebut saat mencapai tanah.

27. Suatu partikel bergerak sepanjang heliks dengan vektor posisi  $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + (t^2 - 3t + 2) \mathbf{k}$  untuk  $t \geq 0$ .

(a) Tentukan kapan partikel bergerak ke bawah.

(b) Apakah partikel pernah berhenti bergerak?

(c) Tentukan kapan partikel sampai pada ketinggian 12 satuan di atas tanah.

(d) Tentukan kecepatan dan laju partikel saat berada pada ketinggian 12 satuan di atas tanah.