

1. Telaah konsep

- (a) Barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen ke bilangan real a jika _____.
- (b) Jika barisan $\{a_n\}$ monoton naik dan _____, maka barisan $\{a_n\}$ konvergen
- (c) Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ _____.
- (d) Deret $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergen jika dan hanya jika _____ dan jumlahnya adalah _____.
- (e) Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ _____.
- (f) Jari-jari kekonvergenan deret pangkat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ditentukan dengan menghitung _____.
- (g) Dengan operasi integral, deret pangkat dari $\tan^{-1} x$ dapat diperoleh dari deret pangkat $f(x) =$ _____.
- (h) Misalkan f selalu mempunyai turunan ke- n di a untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$. Jika $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, maka $c_n =$ _____.
- (i) Galat untuk polinom Taylor dari $f(x)$ berderajat n di sekitar a adalah $R_n(x) =$ _____.

2. Tuliskan lima suku pertama dari barisan $\{a_n\}$ dengan aturan-aturan berikut

- (a) $a_n = \frac{n}{2n-1}$ (c) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$
- (b) $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$ (d) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$

3. Tentukan suku ke- n untuk barisan-barisan pada soal nomor 2, dengan $n = 100, 1000, 10000$, dan buatlah dugaan tentang kekonvergenannya.

4. Periksa kekonvergen barisan-barisan berikut dengan menghitung limitnya.

- (a) $a_n = \frac{n+100}{3n-2}$ (e) $a_n = \frac{2 \ln(n^5)}{\sqrt{n}}$
- (b) $a_n = \frac{3n^3+1}{100n^2+2n}$ (f) $a_n = \frac{n^{10}}{e^n}$
- (c) $a_n = \frac{\sin n}{n}$ (g) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- (d) $a_n = (-1)^n$ (h) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

5. Gunakan teorema kemonotonan barisan untuk menunjukkan kekonvergenan barisan berikut.

- (a) $a_n = \frac{n+1}{2^n}$ (b) $a_n = \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)$

6. Tuliskan deret-deret berikut dalam notasi sigma.

- (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots$
- (b) $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} \dots$
- (c) $2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \dots$
- (d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{4}} + \dots$
- (e) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

7. Periksa kekonvergenan deret berikut dengan menghitung limit jumlah parsialnya.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3^n} - \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\right)$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

8. Gunakan uji suku ke- n untuk menentukan deret yang mana yang divergen. Tentukan juga deret mana yang memerlukan pengujian lebih lanjut untuk menentukan kekonvergenannya.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{5n-1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{2n-1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2 + 1}$

9. Gunakan Uji Rasio Mutlak untuk menentukan apakah deret berikut konvergen atau divergen.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+1}}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n!}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{4^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{3^n n!}$

10. Tentukan jari-jari kekonvergenan dari masing-masing deret pangkat berikut.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{5^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{4^n \sqrt{n}}$
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (3x-2)^n$

11. Tentukan uraian deret pangkat dari fungsi-fungsi berikut dan tentukan juga jari-jari kekonvergenannya. (Setiap fungsi berikut terkait dengan deret geometri.)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{1}{1-3x} & \text{(d)} \quad f(x) &= \frac{x-1}{x+2} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \frac{7}{5+3x} & \text{(e)} \quad f(x) &= \frac{3x}{(x-1)(x+2)} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \frac{x^3}{x^2+4} \end{aligned}$$

12. Tentukan deret pangkat dari fungsi-fungsi berikut dengan operasi turunan atau integral pada suatu deret pangkat.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \text{(c)} \quad f(x) &= \tan^{-1}(2x) \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \frac{2x}{(4+x^2)^2} & \text{(d)} \quad f(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

13. Tentukan fungsi yang mempunyai uraian deret pangkat berikut.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n & & \text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} & & \text{(e)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \end{aligned}$$

14. Tentukan deret Taylor di sekitar $x = a$ dari fungsi berikut.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(x) &= e^{-x}, \quad a = 0 \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \sin(3x), \quad a = \frac{\pi}{6} \\ \text{(c)} \quad h(x) &= \frac{1}{x}, \quad a = 1 \end{aligned}$$

15. Tentukan polinom Taylor orde 3 dari fungsi-fungsi di soal nomor 10 di sekitar $x = a$ yang diberikan di soal tersebut.

16. Tentukan suku-suku deret Maclaurin dari fungsi f berikut sampai dengan suku yang mengandung x^5 . Gunakan deret Maclaurin yang sudah diketahui dan lakukan operasi penjumlahan, perkalian, atau pembagian untuk mendapatkan deret yang diinginkan.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{(c)} \quad f(x) &= \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= x \tan x & \text{(d)} \quad f(x) &= \frac{e^x \sin x}{x} \end{aligned}$$

17. Untuk masing-masing fungsi berikut, tentukan polinom Maclaurin orde 4 untuk $f(x)$ dan gunakan untuk menaksir $f(0.1)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \ln(1+x) & \text{(c)} \quad f(x) &= \sqrt[3]{1+x} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= e^{-3x} & \text{(d)} \quad f(x) &= \tan^{-1} x \end{aligned}$$

18. Untuk masing-masing fungsi berikut, tentukan $R_3(x)$, yakni sisa dari Polinom Taylor orde 3 di sekitar $x = a$. Tentukan juga suatu batas yang baik bagi $|R_3(x_0)|$ dengan titik x_0 berikut.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(x) &= \ln(2+x); \quad a = -1; \quad x_0 = -0.9 \\ \text{(b)} \quad g(x) &= e^{-x}; \quad a = 1; \quad x_0 = 0.75 \\ \text{(c)} \quad g(x) &= \sqrt{x}; \quad a = 4; \quad x_0 = 4.2 \end{aligned}$$

19. Tentukan n agar polinom Maclaurin berorde n dari fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ dapat digunakan untuk menaksir $\ln(1.1)$ dengan galat mutlak kurang dari 0.001.

20. Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ konvergen di $x = -4$ dan divergen di $x = 6$. Apa yang bisa kita simpulkan tentang kekonvergenan masing-masing deret berikut?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n & & \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-3)^n \\ \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n 8^n & & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n 5^n \end{aligned}$$

21. Periksa kekonvergenan deret-deret berikut. Jika konvergen, tentukan jumlahnya.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ \text{(b)} \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \quad (\text{Petunjuk: } n = (n+1) - 1) \end{aligned}$$

22. Misalkan $0 < r < 1$.

(a) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ konvergen dengan uji yang Anda pilih.

(b) Misalkan $S = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$. Tunjukkan bahwa

$$(1-r)S = \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

kemudian hitung nilai S .

23. Dengan menggunakan uraian deret pangkat (atau Deret Maclaurin) dari $\ln(1+x)$, tuliskan $\ln(3/2)$ dan $\ln(2/5)$ dalam bentuk suatu deret.