

1. Telaah konsep

- (a) Kurva ketinggian dari  $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$  berbentuk \_\_\_\_\_.
- (b) Gradien dari fungsi  $f(x, y)$  di titik  $(a, b)$  adalah  $\nabla f(a, b) = \langle \text{_____}, \text{_____} \rangle$ .
- (c) Turunan  $f$  pada arah  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  di titik  $P$  adalah  $D_{\mathbf{u}}f(P) = \text{_____}$  dengan  $\mathbf{u}$  adalah vektor \_\_\_\_\_.
- (d) Dengan menggunakan aturan rantai, jika  $z = f(x, y)$  dan  $x = g(s, t)$ ,  $y = h(s, t)$ , maka  $\frac{\partial z}{\partial t} = \text{_____}$ .
- (e) Vektor gradien  $\nabla F(P)$  adalah vektor \_\_\_\_\_ dari bidang singgung permukaan  $F(x, y, z) = k$  di titik  $P$ .
- (f) Untuk mengetahui jenis titik ekstrem menggunakan Uji Turunan Kedua, kita perlu menghitung  $D = \text{_____}$ .
- (g) Jika pada suatu titik stasioner  $(a, b)$  diketahui  $f_{xx}(a, b) < 0$  dan  $D < 0$ , maka  $(a, b)$  merupakan titik \_\_\_\_\_ dari  $f$ .
- (h) Titik ekstrem  $(x_0, y_0, z_0)$  dari  $f(x, y, z)$  dengan kendala  $g(x, y, z) = 0$  adalah titik yang memenuhi  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \text{_____}$  dan  $g(x_0, y_0, z_0) = \text{_____}$ .

2. Buat sketsa dari permukaan  $z = f(x, y)$  di ruang untuk fungsi dua peubah  $f$  berikut.

- (a)  $f(x, y) = 2$  (d)  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$   
 (b)  $f(x, y) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$  (e)  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$   
 (c)  $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  (f)  $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ .

3. Tentukan daerah asal fungsi-fungsi berikut dan sketsalah daerah tersebut.

- (a)  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y-2x}}$   
 (b)  $f(x, y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$   
 (c)  $f(x, y) = \ln(1+y^2-x^2)$   
 (d)  $f(x, y) = \sin^{-1}(y^2) + \cos(\sqrt{x})$

4. Sketsalah kurva ketinggian  $z = k$  berikut ini untuk nilai  $k$  yang diberikan.

- (a)  $z = x - 2y$ ;  $k = -1, 0, 2, 3$   
 (b)  $z = x^2 - 2x + 4y^2$ ;  $k = -1, 0, 3, 8$   
 (c)  $z = \frac{y-1}{(x+1)^2}$ ;  $k = -1, 0, 1, 2$   
 (d)  $z = x - \frac{y^2}{x}$ ;  $k = -2, 0, 2, 4$

5. Misalkan  $T(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}$  merupakan fungsi yang menyatakan temperatur di titik  $(x, y)$  dengan  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Sketsalah kurva-kurva isothermal (kurva yang memuat titik bertemperatur sama) untuk  $T = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ .

6. Tentukan semua turunan parsial pertama dari fungsi-fungsi di bawah ini.

- (a)  $f(x, y) = 5x + 7y - 11$   
 (b)  $f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$   
 (c)  $f(x, y) = e^{2x}(\cos y + \sin y)$   
 (d)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + xy + y^2 + z^2}$

7. Tentukan kemiringan garis singgung dari kurva hasil perpotongan permukaan  $z = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$  dengan

- (a) bidang  $y = 2$  (b) bidang  $x = 3$

di titik  $(3, 2, 1)$ .

8. Seekor lebah terbang sepanjang kurva hasil perpotongan permukaan  $z = x^4 + xy^3 + 12$  dengan bidang  $x = 1$ . Pada titik  $(1, -2, 5)$ , lebah tersebut meninggalkan kurva untuk selanjutnya terbang sepanjang garis singgungnya. Di titik manakah pada bidang- $xy$ , lebah tersebut hinggap?

9. Tentukan semua turunan parsial kedua dari fungsi-fungsi berikut.

- (a)  $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + 4xy + 1$   
 (b)  $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$ .

10. Hitung limit-limit berikut.

- (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy + y^3)$  (d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$   
 (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{2x^2 + xy}{x^2 + y^2}$  (e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$   
 (c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(e^2 + xy)$  (f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

11. Tunjukkan bahwa limit berikut tidak ada.

- (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$  (c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{2x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$   
 (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos y}{\sin^2(x) + y^2}$  (d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \ln(1+x)}{x^2 + y^4}$

12. Tentukan himpunan terbesar  $S$  sehingga fungsi-fungsi berikut kontinu di  $S$ .

- (a)  $f(x, y) = \frac{x^2 - xy + 3}{x^2 + y^4 + 1}$   
 (b)  $g(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

13. Misalkan  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9y^2}{2x + 3y}, & 2x + 3y \neq 0 \\ g(x), & 2x + 3y = 0. \end{cases}$   
 Jika  $f$  kontinu di seluruh bidang- $xy$ , tentukan  $g(x)$ .

14. Tentukan  $\nabla f$  untuk fungsi-fungsi  $f$  berikut.

- (a)  $f(x, y) = 3x + 4y - 7$

- (b)  $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 - xy + 5$   
 (c)  $f(x, y) = x \ln y + e^x \cos y$   
 (d)  $f(x, y, z) = 3x^4y^2 + 4e^{2y-z}$
15. Hitung  $\nabla f$  di titik yang diberikan.  
 (a)  $f(x, y) = x^3y - xy^4$ ;  $(x, y) = (2, 0)$ .  
 (b)  $f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ ;  $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .
16. Tentukan turunan berarah dari fungsi-fungsi berikut di titik  $P$  dalam arah  $\mathbf{v}$ .  
 (a)  $f(x, y) = 2x^3 + 3xy - 4y^3$ ,  $P(0, 1)$ ,  $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ .  
 (b)  $h(x, y) = e^{3x^3+y}$ ,  $P(0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = \langle -1, 1 \rangle$ .
17. Seekor lebah berada dalam suatu ruangan dengan suhu pada titik  $(x, y, z)$  adalah  $T(x, y, z) = \frac{300}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Jika lebah tersebut berada pada posisi  $(1, 1, 1)$ , ke arah mana lebah tersebut harus terbang agar suhunya menurun paling cepat?
18. Suatu gunung memiliki permukaan yang mulus. Seorang pendaki mengukur kemiringan pada arah barat daya dan arah barat dari posisinya berdiri. Kemiringan yang diperoleh secara berturut-turut adalah  $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$  dan  $-3$ . Tentukan arah gerak pendaki tersebut sehingga dia naik paling cepat.
19. Tentukanlah  $\frac{dw}{dt}$  dalam  $t$  dengan menggunakan aturan rantai.  
 (a)  $w = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ ,  $x = \tan t$ ,  $y = \sec^2 t$ .  
 (b)  $w = \sin(xyz^2)$ ,  $x = t^3$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t$ .
20. Tentukan  $\frac{\partial w}{\partial s}$  dan  $\frac{\partial w}{\partial t}$  dengan menggunakan aturan rantai. Nyatakan jawaban Anda dalam  $s$  dan  $t$ , kemudian tentukan  $\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{s=a, t=b}$  untuk  $(a, b)$  berikut.  
 (a)  $w = x^2y$ ,  $x = st$ ,  $y = s - t$ ;  $(a, b) = (2, -1)$ .  
 (b)  $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $x = \cos(st)$ ,  $y = \sin(st)$ ,  $z = s^2t$ ;  $(a, b) = \left(\pi, \frac{1}{2}\right)$ .
21. Pasir jatuh ke bawah sedikit demi sedikit dengan laju  $2 \text{ cm}^3$  per detik dan setiap saat membentuk kerucut. Ketika tinggi pasir 3 cm dan jari-jari 1 cm, laju pertambahan tingginya adalah 1 cm per detik. Hitunglah laju pertambahan jari-jari kerucut pasir pada saat tinggi pasir 3 cm dan jari-jari 1 cm.
22. Suhu di titik  $(x, y, z)$  dalam suatu ruangan adalah  $T(x, y, z) = \frac{10}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$  (dalam derajat Celsius). Suatu partikel bergerak dengan vektor posisi  $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t) \mathbf{i} + \sin(\pi t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ . Apabila suhu partikel selalu sama dengan suhu ruangan, tentukan laju perubahan suhu partikel pada saat  $t = 1$ .
23. Tentukan persamaan bidang singgung dari permukaan yang diberikan di titik  $P$ .  
 (a)  $xz = y$ ;  $P(1, 2, 2)$   
 (b)  $z^2 = x^2 + y^2$ ;  $P(3, 4, 5)$
24. Tentukan semua titik pada permukaan  $z = x^2 + y^2$  dengan bidang singgung sejajar bidang  $x - y + z = 1$ .
25. Gunakan diferensial untuk menaksir perubahan nilai  $z$  ketika  $(x, y)$  berubah dari titik  $P$  ke titik  $Q$ .  
 (a)  $z = e^{3x+y^2}$ ;  $P(0, 0)$ ,  $Q(0.2, -0.1)$ .  
 (b)  $z = \sqrt{\frac{2y}{x}}$ ;  $P(2, 1)$ ,  $Q(2.1, 0.99)$ .  
 (c)  $z = \tan^{-1}(xy)$ ;  $P(-2, -0.5)$ ,  $Q(-2.03, -0.51)$
26. Tentukan polinom Taylor orde satu dan orde dua dari  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  di sekitar titik  $(3, 4)$ . Kemudian taksir nilai  $f\left(\frac{31}{10}, \frac{39}{10}\right)$  dengan menggunakan masing-masing polinom tersebut.
27. Untuk fungsi-fungsi berikut ini, carilah semua titik kritisnya dan tentukan jenis titik kritis tersebut (maksimum lokal, minimum lokal, atau pelana).  
 (a)  $f(x, y) = x^2 + 2x + 4y^2 + 8y$   
 (b)  $f(x, y) = -x^3 + 12xy - 6y^2 + 1$   
 (c)  $f(x, y) = e^y - ye^x$
28. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi  $f$  berikut pada daerah  $S$  yang diberikan  
 (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$ ;  
 $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$   
 (b)  $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$ ;  
 $S = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$ .
29. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari  $f(x, y) = xy$  dengan kendala  $x^2 + 2y^2 = 4$ .
30. Tentukan nilai maksimum dari perkalian tiga bilangan real positif  $x, y$ , dan  $z$  jika  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 16$ .
31. Tentukan jarak terpendek dari titik asal ke permukaan  $x^2 = yz + 4$ .
32. Temperatur pada permukaan sebuah benda berbentuk elipsoida  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$  di titik  $(x, y, z)$  diberikan oleh  $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 1$ . Tentukan titik terpanas permukaan benda tersebut.
33. Diketahui sebuah balok yang sisi-sisinya paralel dengan bidang-bidang koordinat, berada di dalam elipsoida  $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$ . Tentukan volume maksimum balok tersebut?