1. Telaah konsep
   (a) Kurva ketinggian dari $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ berbentuk __________.
   (b) Gradien dari fungsi $f(x, y)$ di titik (a, b) adalah $\nabla f(a, b) = \langle \_\_\_\_, \_\_\_\_ \rangle$.
   (c) Turunan f pada arah $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ di titik P adalah $D_{\mathbf{u}}(P) =$__________ dengan $\mathbf{u}$ adalah vektor __________.
   (d) Dengan menggunakan aturan rantai, jika $z = f(x, y)$ dan $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, maka $\frac{\partial z}{\partial t} =$ __________.
   (e) Vektor gradien $\nabla F(P)$ adalah vektor __________ dari bidang singgung permukaan $F(x, y, z) = k$ di titik P.
   (f) Untuk mengetahui jenis titik ekstrem menggunakan Uji Turunan Kedua, kita perlu menghitung $D =$ __________.
   (g) Jika pada suatu titik stasioner (a, b) diketahui $f_{xx}(a, b) < 0$ dan $D < 0$, maka (a, b) merupakan titik __________ dari f.
   (h) Titik ekstrim (x_0, y_0, z_0) dari $f(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = 0$ adalah titik yang memenuhi $\nabla f(x_0, y_0, z_0) =$__________ dan $g(x_0, y_0, z_0) =$ __________.

2. Buat sketsa dari permukaan $z = f(x, y)$ di ruang untuk fungsi dua peubah f berikut:
   (a) $f(x, y) = 1$
   (b) $f(x, y) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}$
   (c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   (d) $f(x, y) = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$

3. Tentukan daerah definisi fungsi-fungsi berikut dan sketsalah daerah tersebut.
   (a) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{y - 2x}}$
   (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$
   (c) $f(x, y) = \ln(1 + y^2 - x^2)$
   (d) $f(x, y) = \sin^{-1}(y^2) + \cos(\sqrt{x})$

4. Sketsalah kurva ketinggian $z = k$ berikut ini untuk nilai k yang diberikan.
   (a) $z = x - 2y$; $k = -1, 0, 2, 3$
   (b) $z = x^2 - 2x + 4y^2$; $k = -1, 0, 3, 8$
   (c) $z = \dfrac{y - 1}{(x + 1)^2}$; $k = -1, 0, 1, 2$
   (d) $z = x - \dfrac{y^2}{x}$; $k = -2, 0, 2, 4$

5. Misalkan $T(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}$ merupakan fungsi yang menyatakan temperatur di titik (x, y) dengan $(x, y) \neq (0, 0)$. Sketsalah kurva-kurva isothermal (kurva yang memuat titik bertemperatur sama) untuk $T = 0, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}$.

6. Tentukan semua turunan parsial pertama dari fungsi-fungsi di bawah ini.
   (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6$
   (b) $f(x, y) = e^{2x}(\cos y + \sin y)$
   (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$
   (d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + xy + y^2 + z^2}$

7. Tentukan kemiringan kurva hasil perpotongan permukaan $z = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$ dengan
   (a) bidang $y = 2$ (b) bidang $x = 3$

   di titik $(3, 2, 1)$.

8. Seekor lebah terbang sepanjang kurva hasil perpotongan permukaan $z = x^4 + xy^3 + 12$ dengan bidang $x = 1$. Pada titik $(1, -2, 5)$, lebah tersebut meninggalkan kurva untuk selanjutnya terbang sepanjang garis singgungnya. Di titik manakah pada bidang-xy, lebah tersebut hinggap?

9. Tentukan semua turunan parsial kedua dari fungsi-fungsi berikut.
   (a) $f(x, y) = 3x^2 - 4y + 4xy^2 + 1$
   (b) $f(x, y) = \ln(2x + y)$

10. Hitung limit-limit berikut.
    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy + y^3)$
    (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2 + xy}{y^2 + x}$
    (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(e^2 + xy\right)$
    (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$
    (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$
    (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

11. Tunjukkan bahwa limit berikut tidak ada.
    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$
    (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos y}{\sin^2(x) + y^2}$
    (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}$
    (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \ln(1 + x)}{x^2 + y^4}$

12. Tentukan himpunan terbesar S sehingga fungsi-fungsi berikut kontinu di S.
    (a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - xy + 3}{x^2 + y^4 + 1}$
    (b) $g(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
    (c) $h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x + y)}{x + y}, & x + y \neq 0 \\ 1, & x + y = 0 \end{cases}$
    (d) $k(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

13. Misalkan $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9y^2}{2x + 3y}, & 2x + 3y \neq 0 \\ g(x), & 2x + 3y = 0. \end{cases}$

    Jika f kontinu di seluruh bidang-xy, tentukan $g(x)$.

14. Tentukan ∇f untuk fungsi-fungsi f berikut.
    (a) $f(x,y) = x + 5y^2 - x^2y + 1$
    (b) $f(x,y) = x\cos y + e^x \sin y$
    (c) $f(x,y,z) = xyz + e^{y^2+z^2}$

15. Hitung ∇f di titik yang diberikan.
    (a) $f(x,y) = 2x^2y - 3xy^2$; $(x,y) = (-1,2)$.
    (b) $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$; $(x,y) = (0,1)$.

16. Tentukan turunan berarah dari fungsi-fungsi berikut di titik P dalam arah $\mathbf{v}$.
    (a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$, $P(1,-1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
    (b) $h(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $P(0,0)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$

17. Seekor lebah berada dalam suatu ruangan dengan suhu pada titik (x,y,z) adalah $T(x,y,z) = \dfrac{120}{1+x^2+y^2+z^2}$. Jika lebah tersebut berada pada posisi $(1,1,1)$, ke arah mana lebah tersebut harus terbang agar suhunya menurun paling cepat?

18. Suatu gunung memiliki permukaan yang mulus. Seorang pendaki mengukur kemiringan pada arah tenggara dan arah barat dari posisinya berdiri. Kemiringan yang diperoleh secara berturut-turut adalah 2 dan -1. Tentukan arah gerak pendaki tersebut sehingga dia naik paling cepat.

19. Tentukan $\dfrac{dw}{dt}$ dalam t dengan menggunakan aturan rantai.
    (a) $w = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $x = \sin t$, $y = \sec t$.
    (b) $w = \sin(xyz^2)$, $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$.

20. Tentukan $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ dan $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ dengan menggunakan aturan rantai. Nyatakan jawaban Anda dalam s dan t, kemudian tentukan $\left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{s=a,t=b}$ untuk (a,b) berikut.
    (a) $w = x^2y$, $x = st$, $y = s - t$; $(a,b) = (2,-1)$.
    (b) $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x = \cos(st)$, $y = \sin(st)$, $z = s^2t$; $(a,b) = \left(\pi, \dfrac{1}{2}\right)$.

21. Pasir jatuh ke bawah sedikit demi sedikit dengan laju 2 cm^3 per detik dan setiap saat membentuk kerucut. Ketika tinggi pasir 3 cm dan jari-jari 1 cm, laju pertambahan tingginya adalah 1 cm per detik. Hitunglah laju pertambahan jari-jari kerucut pasir pada saat tinggi pasir 3 cm dan jari-jari 1 cm.

22. Suhu di titik (x,y,z) dalam suatu ruangan adalah $T(x,y,z) = \dfrac{10}{1+x^2+y^2+z^2}$ (dalam derajat Celcius). Suatu partikel bergerak dengan vektor posisi $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\ \mathbf{i} + \sin(\pi t)\ \mathbf{j} + t\ \mathbf{k}$. Apabila suhu partikel selalu sama dengan suhu ruangan, tentukan laju perubahan suhu partikel pada saat $t = 1$.

23. Tentukan persamaan bidang singgung dari permukaan yang diberikan di titik P.
    (a) $z = xy^2 - x - y$; $P(1,1,-1)$
    (b) $z^2 = x^2 + y^2$; $P(3,4,5)$

24. Tentukan semua titik pada permukaan $z = x^2 + y^2$ dengan bidang singgung sejajar bidang $x - y + z = 1$.

25. Gunakan diferensial untuk menaksir perubahan nilai z ketika (x,y) berubah dari titik P ke titik Q
    (a) $z = e^{3x+y^2}$; $P(0,0)$, $Q(0.2,-0.1)$.
    (b) $z = \sqrt{\dfrac{2y}{x}}$; $P(2,1)$, $Q(2.1, 0.99)$.
    (c) $z = \tan^{-1}(xy)$; $P(-2,-0.5)$, $Q(-2.03,-0.51)$

26. Tentukan polinom Taylor orde satu dan orde dua dari $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ di sekitar titik $(3,4)$. Kemudian taksir nilai $f\left(\dfrac{29}{10}, \dfrac{41}{10}\right)$ dengan menggunakan masing-masing polinom tersebut.

27. Tentukan nilai maksimum dan minimum global dari fungsi $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7$ pada himpunan $S = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

28. Untuk fungsi-fungsi berikut ini, carilah semua titik kritisnya dan tentukan jenis titik kritis tersebut (maksimum, minimum, atau pelana).
    (a) $f(x,y) = x^2 + 2x - 4y^2$
    (b) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
    (c) $f(x,y) = e^y - ye^x$

29. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi f berikut pada daerah S yang diberikan
    (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4y}$; $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
    (b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$; $S = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0\}$.

30. Tentukan nilai maksimum dari $f(x,y) = 3x - y + 6$ dengan kendala $x^2 + y^2 = 4$.

31. Tentukan nilai maksimum dari perkalian tiga bilangan real positif x, y, dan z jika $x + y + z^2 = 16$.

32. Tentukan jarak terkecil dari titik asal ke permukaan $z^2 = xy + 4$.

33. Temperatur pada permukaan sebuah benda berbentuk elipsoida $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ di titik (x,y,z) diberikan oleh $T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 1$. Tentukan titik terpanas permukaan benda tersebut.

34. Model keluaran produksi Cobb-Douglas P diberikan oleh fungsi $P(x, y) = kx^{\alpha}y^{1-\alpha}$ dengan x adalah jam kerja total pekerja dalam satu tahun, y adalah input kapital dalam satu tahun, dan k, α suatu konstanta yang terkait dengan unit ekonomi yang ditinjau.
    Jika untuk suatu perusahaan diketahui $k = 120$, $\alpha = 3/4$, biaya pekerja per jam Rp 100.000, biaya per input kapital Rp 300.000, dan total biaya keseluruhan tidak boleh lebih dari Rp 100.000.000, tentukan keluaran produksi maksimum dari perusahaan tersebut.

35. Diketahui sebuah balok yang sisi-sisinya paralel dengan bidang-bidang koordinat, berada di dalam elipsoida $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$. Tentukan volume maksimum balok tersebut?

36. Diketahui bahwa harga bahan per satuan luas untuk membuat alas suatu balok tiga kali lebih mahal daripada harga bahan untuk sisi dan juga untuk tutupnya. Tentukan berapa volume terbesar balok yang dapat dibuat jika jumlah uang yang tersedia adalah Rp. 120.000,00 sedangkan harga bahan untuk alasnya adalah Rp. 6000,00 per satuan luas.

37. Tentukan volume terkecil dari benda pejal yang berada pada oktan pertama dan berada di bawah bidang $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ yang melalui titik $(2, 1, 2)$. (Petunjuk: Cari nilai a, b, dan c terlebih dahulu)