

1. Telaah konsep

- (a) Fungsi yang mengaitkan fungsi bernilai real $f(x, y, z)$ dengan vektor $\nabla f(x, y, z)$ disebut _____.
- (b) Jika $\mathbf{F} = \langle M, N, P \rangle$ adalah suatu medan vektor, maka $\text{div } \mathbf{F} = \text{_____}$ dan $\text{curl } \mathbf{F} = \text{_____}$.
- (c) Jika $\mathbf{r} = \langle x(t), y(t) \rangle$ menyatakan vektor posisi dari setiap titik pada kurva C dan $\mathbf{F} = \langle M(x, y), N(x, y) \rangle$ adalah suatu medan gaya pada bidang, maka kerja W oleh gaya \mathbf{F} pada objek sepanjang C adalah $\int_C \text{_____} dt$.
- (d) Integral $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ bebas lintasan jika dan hanya jika $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{_____}$ untuk suatu fungsi skalar f .
- (e) Misalkan C adalah suatu kurva tutup sederhana yang membatasi daerah S pada bidang- xy . Jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu pada S dan C , maka $\oint_C M dx + N dy = \int \int_S \text{_____} dA$.
- (f) Misalkan G suatu permukaan $z = f(x, y)$ dengan $(x, y) \in R$. Maka $\iint_G g(x, y, z) dS = \iint_R g(x, y, f(x, y)) \text{_____} dy dx$.
- (g) Teorema Gauss menyatakan bahwa $\iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial S} \text{_____} dS$.
- (h) Jika syarat yang diminta terpenuhi, maka teorema Stoke di ruang menyatakan $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dS = \iint_S \text{_____} dS$ dengan S suatu permukaan dan ∂S batas dari S .

2. Sketsakan medan vektor berikut di bidang:

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i}$ (b) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

3. Cari medan gradien dari:

- (a) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$.
(b) $f(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$

4. Hitung $\text{div } \mathbf{F}$ dan $\text{curl } \mathbf{F}$ dari:

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.
(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y\mathbf{i} + e^x \sin y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

5. Diberikan medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ dan medan skalar $f(x, y, z) = x + y + z$.

- (a) Hitung $\text{div}(\text{curl } \mathbf{F})$, $\text{curl}(\nabla f)$, $\text{div}(f\mathbf{F})$.
(b) Apakah $\nabla(\nabla f)$, $\text{curl}(\text{curl } \mathbf{F})$, $\text{div}(\text{div } \mathbf{F})$, dan $\text{div}(\text{curl}(\nabla f))$ daapt dihitung?. Jika tidak jelaskan alasannya, jika ya maka hitung nilainya.

6. Tentukan hubungan konstanta a, b dan c agar $f(x, y, z) = 2ax^2 + by^2 + cz^2$ memenuhi $\nabla \cdot \nabla f = 0$.

7. Hitung integral garis berikut

- (a) $\int_C xe^y ds$: C adalah segmen garis dari $(-1, 2)$ ke $(1, 1)$.
(b) $\int_C (2x + 9z) ds$: C adalah kurva $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$.
(c) $\int_C y dx + x dy$: C adalah kurva $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$.

8. Hitung kerja yang dilakukan oleh medan gaya \mathbf{F} untuk memindahkan partikel sepanjang lintasan C :

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = e^x\mathbf{i} - e^{-y}\mathbf{j}$, C adalah kurva $x = 3 \ln t, y = \ln 2t, 1 \leq t \leq 5$.
(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$, C adalah kurva seperempat elips $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$.
(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, C adalah kurva dengan $x = \sin t, y = \cos t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

9. Seekor tupai dengan berat 0,25 kg memanjat pohon berbentuk tabung dengan menyusuri lintasan yang berbentuk helix $x = \cos t, y = \sin t, z = 4t, 0 \leq t \leq 8\pi$ (jarak diukur dalam meter). Berapa kerja yang dilakukannya?

10. Periksa apakah medan vektor \mathbf{F} berikut konservatif atau tidak. Jika \mathbf{F} konservatif, tentukan f yang memenuhi $\mathbf{F} = \nabla f$.

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = (4x - 5y)\mathbf{i} - (5x + 3y)\mathbf{j}$
(b) $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 7y)\mathbf{i} - (6x + 2y)\mathbf{j}$
(c) $\mathbf{F}(x, y) = (12x^2 + 3y^2 + 5y)\mathbf{i} + (6xy - 3y^2 + 5x)\mathbf{j}$
(d) $\mathbf{F}(x, y) = (2e^y - ye^x)\mathbf{i} + (2xe^y - e^x)\mathbf{j}$
(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2\mathbf{i} + 6y^2\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$

11. Tunjukkan bahwa integral garis berikut tidak bergantung lintasan. Kemudian, hitung nilai integral tersebut.

- (a) $\int_{(1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy) dx + (x^2 + 2xy) dy$.
(b) $\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$.
(c) $\int_{(0,1,0)}^{(1,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$

12. Misalkan $M(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $N(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$, $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ dan $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

- (a) Periksa apakah $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ pada D .
(b) Tunjukkan bahwa \mathbf{F} tidak konservatif dengan menghitung $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dimana C adalah kurva dengan persamaan parameter $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

13. Gunakan Teorema Green untuk menghitung nilai integral berikut.
- (a) $\oint_C 2xy \, dx + y^2 \, dy$ dengan C adalah kurva tutup sederhana yang dibentuk oleh $y = \frac{x}{2}$ dan $y = \sqrt{x}$ antara $(0, 0)$ dan $(4, 2)$.
- (b) $\oint_C \sqrt{y} \, dx + \sqrt{x} \, dy$ dengan C adalah kurva tutup sederhana yang dibentuk oleh $y = 0$, $x = 2$, dan $y = x^2$.
14. Misalkan C adalah lintasan yang dibentuk oleh $y = 4x$ dan $y = 2x^2$. Hitung $\frac{1}{2} \oint_C (-y \, dx + x \, dy)$.
15. Misalkan $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ adalah medan vektor konservatif dengan M dan N mempunyai turunan parsial yang kontinu pada himpunan buka terhubung D . Jika C adalah lintasan tutup sederhana pada D , hitung $\oint_C M \, dx + N \, dy$.
16. Misalkan C adalah persegi dengan titik sudut $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, dan $(0, 1)$. Jika $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, hitung $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ dan $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.
17. Misalkan C_1 dan C_2 berturut-turut menyatakan lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ dan $x^2 + y^2 = 1$ yang berputar berlawanan arah jarum jam. Misalkan S adalah daerah yang dibatasi oleh C_1 dan C_2 . Jika $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 30$ dan $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = -20$, hitung $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$.
18. Hitung $\iint_G g(x, y, z) \, dS$ jika diberikan
- (a) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ dan $G : z = x + y + 1$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
- (b) $g(x, y, z) = x + y$ dan $G : z = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq 1$.
- (c) $g(x, y, z) = x + y$ dan G : permukaan kubus yang dengan batas $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.
- (d) $g(x, y, z) = 2y^2 + z$ dan $G : z = x^2 - y^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.
19. Hitung fluks dari \mathbf{F} sepanjang G .
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ dan G adalah bagian dari bidang $z = 8x - 4y - 5$ yang berada di atas segitiga dengan sudut-sudut $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, dan $(1, 0, 0)$
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = -(9 - x^2)\mathbf{j}$ dan G adalah bagian dari bidang $2x + 3y + 6z = 6$ yang berada pada oktan pertama.
20. Gambarkan permukaan yang diberikan oleh
- (a) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + 3v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1$.
- (b) $\mathbf{r}(u, v) = 2u\mathbf{i} + 3v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$, $-1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2$.
21. Gunakan Teorema Divergensi Gauss untuk menghitung $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$.
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ dengan S adalah setengah bola $0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos(z^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \cos(x^2)\mathbf{k}$ dengan S adalah kubus $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ dengan S adalah bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.
- (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ dengan S adalah tabung $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2$.
22. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$.
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ dengan S setengah bola $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ dan \mathbf{n} upper normal.
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + \cos(xz)\mathbf{k}$ dengan S bagian dari elipsoida $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ yang berada di bawah bidang- xy dan \mathbf{n} lower normal.
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$ dengan S bagian dari paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ yang berada di atas bidang- xy dan \mathbf{n} upward normal.
- (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ dengan S bagian dari bola $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ yang berada di bawah bidang $z = 2$ dan \mathbf{n} outward normal.
23. Misalkan $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dan S suatu benda pejal yang memenuhi kondisi Teorema Divergensi Gauss. Buktikan bahwa volume dari S diberikan oleh
- $$\frac{1}{3} \iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$
24. Misalkan S adalah suatu bola dengan pusat di $(0, 0, 0)$. Tunjukkan bahwa
- $$\iint_{\partial S} (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$
- (a) dengan menggunakan Teorema Stokes.
- (b) dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss. (Petunjuk: buktikan $\text{div}(\text{curl } \mathbf{F}) = 0$)