UJIAN AKHIR SEMESTER MA1204 MATEMATIKA IIC

SENIN, 8 MEI 2023

WAKTU: 120 MENIT

Nama: **NIM:**

*Dilarang menggunakan kalkulator dan alat bantu hitung lainnya. Ujian ini terdiri atas **tiga** bagian: A (5 soal isian singkat, dengan nilai maksimum tiap soal 2), B (6 soal uraian singkat, dengan nilai maksimum tiap soal 3) dan C (2 soal uraian panjang, dengan nilai maksimum tiap soal 8).*

▲ Bagian A

*Tuliskan **hanya jawaban akhir** dari tiap soal pada kotak yang tersedia.*

1. Diberikan $f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$.

   (a) Fungsi f akan terdefinisi untuk himpunan (x,y) yang memenuhi $\boxed{\quad\quad}$.

   (b) Kurva ketinggian f akan berbentuk $\boxed{\quad\quad}$.

2. Misalkan $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, $f_x(1,-1) = 10$, dan $f_y(1,-1) = 15$.

   (a) $\nabla f(1,-1) = \boxed{\quad\quad}$.

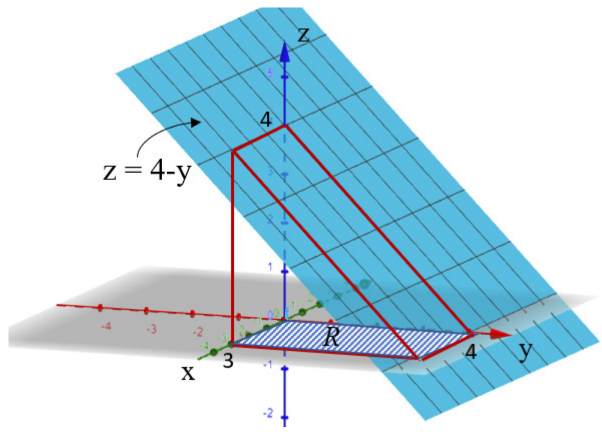
   (b) Turunan berarah f di $(1,-1)$ dalam arah $\mathbf{u}$ adalah $D_{\mathbf{u}} f(1,-1) = \boxed{\quad\quad}$.

3. Daerah

   $$S = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 6\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi\}$$

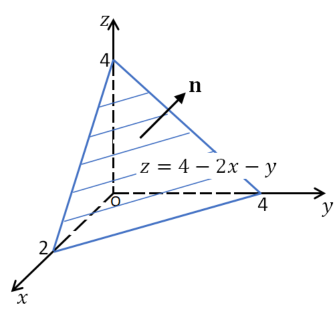
   adalah lingkaran dengan pusat $\boxed{\quad\quad}$ dan berjari-jari $\boxed{\quad\quad}$.

4. Integral lipat $\int_0^a \int_0^b \int_0^{4-y} dz\,dy\,dx$ menyatakan volume benda pejal di bawah bidang miring, di atas daerah R seperti pada gambar, dengan demikian $a = \boxed{\quad\quad}$, $b = \boxed{\quad\quad}$.



Gambar 1. Soal A4

5. Diberikan suatu permukaan G di oktan pertama dengan persamaan $z = 4 - 2x - y$, seperti pada gambar di bawah.



Gambar 2. Soal A5

   (a) Vektor normal satuan dari permukaan tersebut adalah $\mathbf{n} = \boxed{\quad\quad}$

   (b) Fluks dari medan vektor $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ yang melalui permukaan tersebut adalah $\iint_G H(x,y,z)\,dS$ dengan $H(x,y,z) = \boxed{\quad\quad}$.

UJIAN AKHIR SEMESTER MA1204 MATEMATIKA IIC

SENIN, 8 MEI 2023

WAKTU: 120 MENIT

Nama: **NIM:**

Dilarang menggunakan kalkulator dan alat bantu hitung lainnya. Ujian ini terdiri atas ***tiga*** *bagian: A (5 soal isian singkat, dengan nilai maksimum tiap soal 2), B (6 soal uraian singkat, dengan nilai maksimum tiap soal 3) dan C (2 soal uraian panjang, dengan nilai maksimum tiap soal 8).*

■ Bagian A

Tuliskan ***hanya jawaban akhir*** *dari tiap soal pada kotak yang tersedia.*

1. Diberikan $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

   (a) Fungsi f akan terdefinisi untuk himpunan (x, y) yang memenuhi ______.

   (b) Kurva ketinggian f akan berbentuk ______.

2. Misalkan $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, $f_x(-1, 1) = 15$, dan $f_y(-1, 1) = 10$.

   (a) $\nabla f(-1, 1) =$ ______.

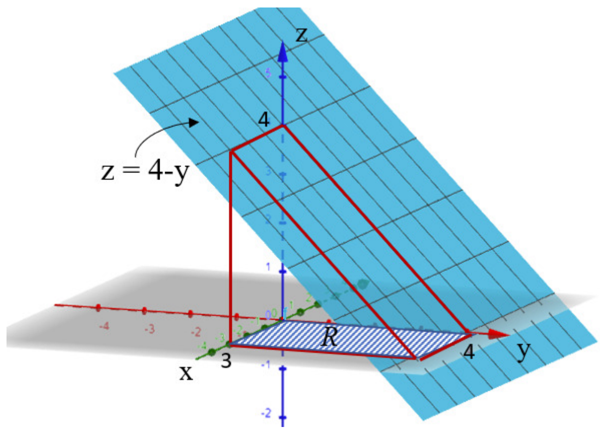
   (b) Turunan berarah f di $(-1, 1)$ dalam arah $\mathbf{u}$ adalah $D_{\mathbf{u}}f(-1, 1) =$ ______.

3. Daerah

$$S = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 6\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

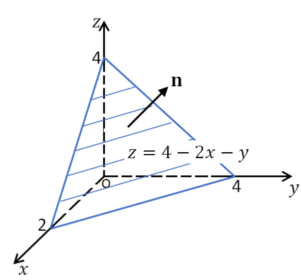
   adalah lingkaran dengan pusat ______ dan berjari-jari ______.

4. Integral lipat $\int_0^a \int_0^b \int_0^{4-y} dz dx dy$ menyatakan volume benda pejal di bawah bidang miring, di atas daerah R seperti pada gambar, dengan demikian $a =$ ______, $b =$ ______.



Gambar 1. Soal A4

5. Diberikan suatu permukaan G di oktan pertama dengan persamaan $z = 4 - 2x - y$, seperti pada gambar di bawah.



Gambar 2. Soal A5

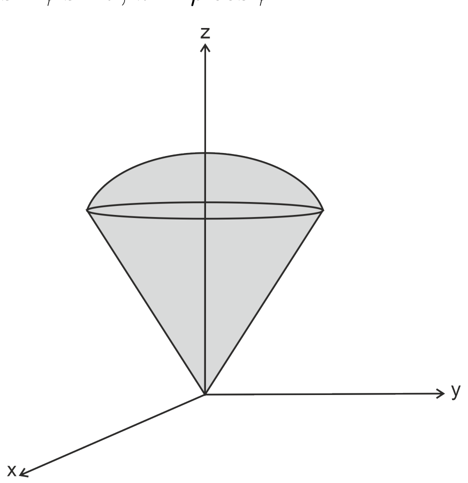
   (a) Vektor normal satuan dari permukaan tersebut adalah $\mathbf{n} =$ ______

   (b) Fluks dari medan vektor $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ yang melalui permukaan tersebut adalah $\iint_G H(x, y, z)\, dS$ dengan $H(x, y, z) =$ ______.

Untuk soal bagian B dan C, tuliskan jawaban lengkap, beserta langkah-langkahnya, untuk tiap soal berikut. Tuliskan jawaban tiap soal pada tempat yang sesuai pada lembar jawaban.

Bagian B

1. Tentukan f_x, f_y, dan f_z dari $f(x, y, z) = x^2 + ye^z$.
2. Tunjukkan bahwa limit berikut tidak ada
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x - 2y + 3}{x + y - 3}.$$
3. Tentukan persamaan bidang singgung dari permukaan dengan persamaan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ di titik $(1, 1, 1)$.
4. Sketsalah daerah pengintegralan pada $\int_0^3 \int_{x^2+1}^{10} f(x, y)\ dydx$, kemudian nyatakan integral tersebut dengan urutan pengintegralan yang berbeda.
5. Hitung nilai dari integral berikut:
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \frac{8e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx.$$
6. Misalkan B adalah daerah di atas kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di bawah permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (lihat gambar di bawah). Nyatakan
$$\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dV$$
dalam koordinat bola. (**Integral tidak perlu dihitung**).
Transformasi koordinat bola: $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho \cos\phi$.

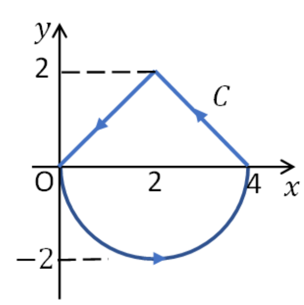


Gambar 3. Soal B6

Bagian C

1. Temperatur pada suatu lempeng logam di posisi (x, y) diberikan sebagai
$$T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$
   (a) Tentukan temperatur paling rendah dari lempeng tersebut.
   (b) Jika seekor serangga berjalan mengelilingi lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, tentukan temperatur paling tinggi dan paling rendah yang dialami serangga?
   (c) Tentukan temperatur paling tinggi dan paling rendah pada cakram lingkaran $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 25\}$.

2. Diberikan medan vektor $\mathbf{F}(x, y) = 7y\,\mathbf{i} + 10x\,\mathbf{j}$.
   (a) Tentukan apakah $\mathbf{F}$ merupakan medan vektor konservatif atau bukan? Jelaskan.
   (b) Tentukan usaha yang dilakukan oleh medan vektor tersebut untuk memindahkan partikel dari titik $(0, 0)$ ke titik $(2, 2)$ melalui lintasan garis $y = x$.
   (c) Tentukan juga usaha yang dilakukan oleh medan vektor tersebut untuk memindahkan partikel dari titik $O(0, 0)$ sepanjang lintasan C hingga kembali ke titik $O(0, 0)$, seperti pada gambar di bawah (potongan sisi segitiga dengan lingkaran).



Gambar 4. Soal C2