

1. Telaah konsep

- (a) Gradien (kemiringan) garis singgung dari grafik fungsi f di titik $(c, f(c))$ diberikan oleh $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$.
- (b) Kecepatan sesaat gerak partikel di sepanjang suatu garis pada waktu c adalah limit dari $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ pada interval waktu antara c dan $c + h$ ketika h mendekati nol.
- (c) Turunan dari f di $x = a$ (jika ada) didefinisikan sebagai $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- (d) Contoh fungsi f yang kontinu di $x = 0$, tetapi f tidak mempunyai turunan di $x = 0$ adalah $f(x) = |x|$.
- (e) Misalkan $p(x) = f(x)g(x)$ dan $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dengan menggunakan aturan turunan, kita peroleh $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ dan $q'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.
- (f) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ dan $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.
- (g) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ dan $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$.

2. Hitung $f'(a)$ dengan menggunakan kedua definisi turunan:

- (i) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ dan
 - (ii) $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- untuk fungsi-fungsi f dan nilai a berikut.

- (a) $f(x) = 2x + 1$ dan $a = 5$
- (b) $f(x) = 2x^2 + x$ dan $a = -3$
- (c) $f(x) = \frac{3}{x}$ dan $a = \frac{3}{2}$

3. Tentukan turunan fungsi berikut dengan menggunakan definisi turunan.

- (a) $f(x) = 8$
- (b) $f(x) = 4x + 1$
- (c) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$
- (d) $f(x) = \sin(2x)$

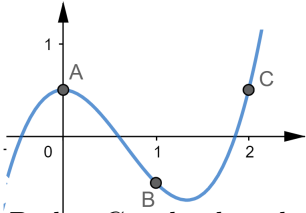
4. Limit berikut menyatakan turunan dari fungsi f di titik a . Tentukan f dan a yang sesuai.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{(1+h)^2} - 5}{h}$
- (e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2h) - 1}{h}$
- (f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - (3+h)}{h}$

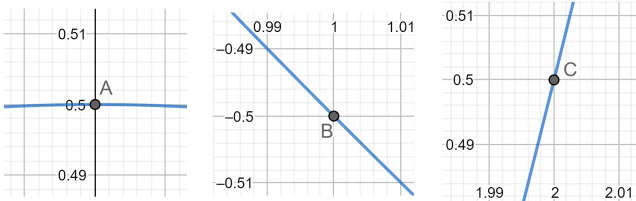
5. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 80 meter. Ketinggian bola (meter) sebagai fungsi waktu t (detik) dinyatakan dengan $h(t) = 80 - 5t^2$.

- (a) Hitung kecepatan sesaat bola saat $t = 1$.
- (b) Hitung kecepatan sesaat bola saat bola menyentuh tanah.

6. Diberikan sebuah fungsi dengan grafik sebagai berikut.

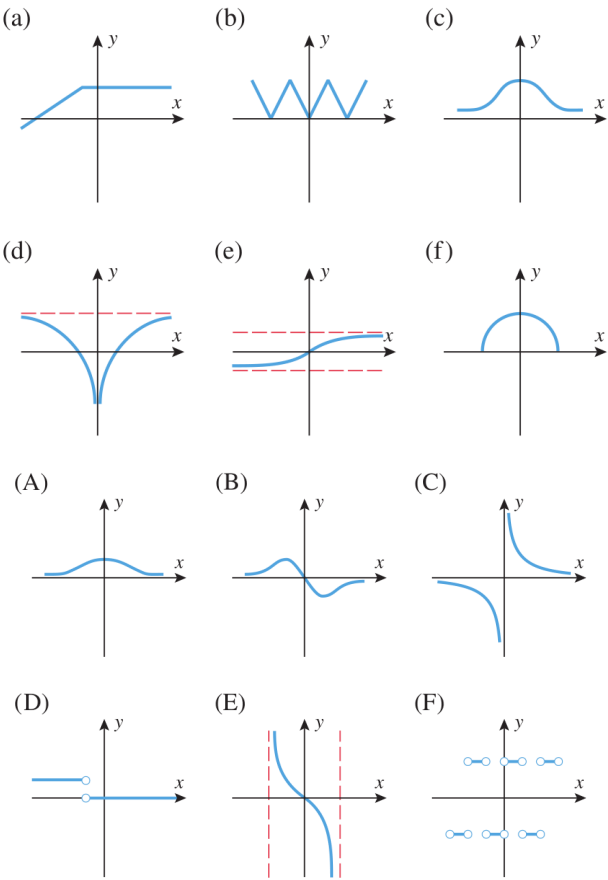


Tiga titik A , B , dan C terletak pada grafik fungsi. Pembesaran grafik fungsi di sekitar tiga titik tersebut adalah sebagai berikut.

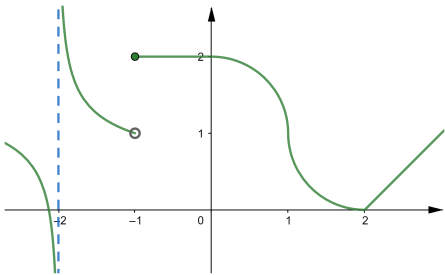


Perkirakan kemiringan garis singgung grafik fungsi di titik A , B , dan C .

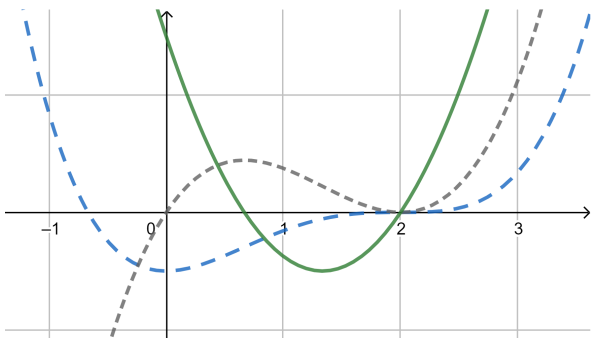
7. Pasangkan grafik fungsi (a)-(f) berikut dengan grafik turunan (A)-(F).



8. Diberikan grafik fungsi f sebagai berikut. Tentukan semua titik di daerah asal fungsi f di mana f tidak mempunyai turunan. Jelaskan alasan Anda.



9. Periksa apakah fungsi berikut mempunyai turunan di $x = a$ dengan meninjau limit kiri dan kanan pada definisi turunan.
- (a) $f(x) = |x^2 - 1|$; $a = 1$
- (b) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x \leq 0 \\ \cos(x), & x > 0 \end{cases}$; $a = 0$
- (c) $h(x) = \frac{\lfloor 2 - x \rfloor}{x}$; $a = 1$.
10. Diberikan grafik fungsi f , f' , dan f'' sebagai berikut.



- Tentukan mana grafik f , f' , dan f'' . Jelaskan jawaban Anda.
11. Tentukan a dan b sehingga fungsi f yang didefinisikan dengan
- $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \leq 1 \\ x^3 - 5, & x > 1 \end{cases}$$
- mempunyai turunan di setiap bilangan real.
12. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut menggunakan aturan turunan.
- (a) $f(x) = (x^4 - 2)(x^2 - 2x)$
- (b) $f(x) = \frac{x^5 - 4x - 3}{x^3 + 4}$
- (c) $f(x) = \frac{(x^4 + 4)(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$
13. Misalkan $f(2) = 5$, $f'(2) = 3$, $g(2) = -4$, $g'(2) = 6$, dan $h(x) = \frac{(x^2 + 1)g(x)}{f(x)}$. Hitung turunan berikut.
- (a) $(f + g)'(2)$
- (b) $(f - g)'(2)$
- (c) $(f \cdot g)'(2)$
- (d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
- (e) $\left(\frac{g^2}{f}\right)'(2)$
- (f) $h'(2)$
14. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut
- (a) $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x$
- (b) $f(x) = 3 \cot x + 2 \csc x$
- (c) $f(x) = \sin x \cos x$
- (d) $f(x) = 5 \sec x \tan x$
- (e) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$
15. Gunakan identitas trigonometri dan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi berikut.
- (a) $f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$
- (b) $f(\theta) = \cos(2\theta)$
16. Diberikan fungsi f dan titik P berikut. Tentukan persamaan garis singgung grafik f di titik P .
- (a) $f(x) = x^2 - x$; $P(1, 0)$
- (b) $f(x) = 1 + 2 \tan x$; $P\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
17. Tentukan semua titik pada grafik fungsi berikut sehingga garis singgung pada titik tersebut sejajar dengan sumbu- x .
- (a) $f(x) = x^3 - 27x$
- (b) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
- (c) $h(x) = 2\sqrt{3} \sin x + \cos(2x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$
18. Suatu partikel bergerak pada sumbu- x dan posisi partikel terhadap waktu dinyatakan dengan fungsi
- $$x(t) = \cos t + \sin t - 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
- dengan t diukur dalam detik.
- (a) Tentukan kapan partikel berhenti bergerak sesaat.
- (b) Tentukan interval waktu di mana partikel bergerak ke kiri.
19. Diberikan parabola $y = x^2 + 3$ dan titik $B(1, 0)$. Misalkan $A(a, b)$ suatu titik pada parabola. Tentukan semua kemungkinan nilai a agar garis AB menyinggung parabola tersebut.
- Petunjuk:* Hitung kemiringan garis AB dengan dua cara.
20. Misalkan $g(x) = \frac{x \cdot |x|}{2}$. Tentukan $g'(x)$.
21. Diberikan fungsi f dan g . Misalkan $f(2) = 4$, $f'(2) = 6$, $g(2) = 3$, dan $g'(2) = 5$. Tentukan limit berikut dengan pertama kali menginterpretasikannya sebagai turunan dari suatu fungsi.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x) - 1}{x - 2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 12}{x - 2}$
22. Misalkan $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
- (a) Tentukan $f'(x)$ untuk $x \neq 0$.
- (b) Tentukan $f'(0)$.
- Petunjuk:*
- Gunakan ketaksamaan $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \sec x$ dan **Teorema Apit**.