

1. Telaah konsep

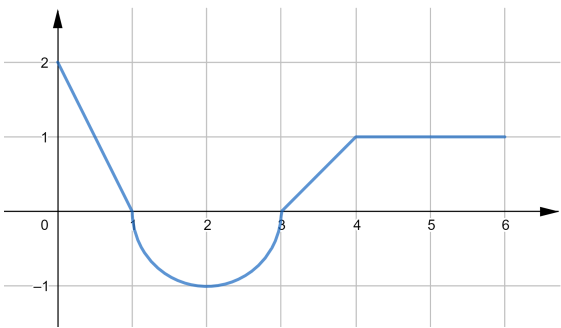
- (a) Limit jumlah Riemann yang menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ dan di atas sumbu- x untuk $1 \leq x \leq 4$ adalah ____.
- (b) Nilai $\sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{n} =$ ____.
- (c) Misalkan fungsi f terdefinisi pada $[a, b]$. Jika $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ ada, maka f dikatakan ____ pada $[a, b]$.
- (d) Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan x di selang (a, b) , maka $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt =$ ____.
- (e) Misalkan F kontinu pada $[a, b]$ dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x di (a, b) , maka $\int_a^b f(x) dx =$ ____.
- (f) Jika f ____ pada $[a, b]$, Teorema Nilai Rata-rata untuk integral mengatakan bahwa terdapat $c \in (a, b)$ sehingga ____.
- (g) Jika f adalah fungsi ganjil yang kontinu pada $[-1, 1]$, maka $\int_{-1}^1 f(x) dx =$ ____.
- (h) Dengan aturan Trapesium dengan n partisi diperoleh taksiran $\int_0^1 f(x) dx \approx$ ____ dengan galat mutlak $|E_n| =$ ____.

2. Dengan menggunakan limit jumlah Riemann kiri atau kanan, hitunglah integral tentu berikut.

- (a) $\int_0^1 4 dx$
- (c) $\int_1^4 (x^2 + 2x) dx$
- (b) $\int_{-2}^4 (2x - 1) dx$
- (d) $\int_0^3 (x^3 + 2) dx$

Catatan: $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. Kurva $y = f(x)$ berikut terdiri atas tiga garis lurus dan setengah lingkaran seperti pada gambar di bawah ini.



Hitunglah integral tentu berikut dengan menginterpretasikannya sebagai luas daerah bertanda.

- (a) $\int_0^1 f(x) dx$
- (c) $\int_2^4 f(x) dx$
- (b) $\int_1^3 f(x) dx$
- (d) $\int_0^6 f(x) dx$

4. Hitung $\int_{-1}^2 f(x) dx$ untuk fungsi-fungsi berikut dengan terlebih dahulu membuat sketsa grafik fungsi f .

- (a) $f(x) = |x|$
- (c) $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- (b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$
- (d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

5. Misalkan f dan g fungsi kontinu, dan diketahui $\int_0^1 f(x) dx = -2$, $\int_1^3 f(x) dx = 5$, $\int_1^3 g(x) dx = 1$, dan $\int_0^3 g(x) dx = 4$. Hitunglah integral-integral berikut.

- (a) $\int_0^3 f(x) dx$
- (c) $\int_0^3 (f(x) + g(x)) dx$
- (b) $\int_1^3 5g(x) dx$
- (d) $\int_1^3 (2f(t) - 3g(t)) dt$

6. Misalkan $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 3 \\ 5 - x, & 3 \leq x \leq 7 \end{cases}$ dan $A(x) = \int_0^x f(t) dt$ untuk $x \in [0, 7]$. Sketsa grafik fungsi f dan tentukan suatu formula untuk $A(x)$. Periksalah apakah berlaku bahwa $A'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (0, 7)$.

7. Tentukan turunan fungsi dalam variabel x berikut.

- (a) $\int_1^x \frac{t^2}{t^2 + 2} dt$
- (c) $\int_2^{x^2+1} \frac{3s}{2 + \sin s} ds$
- (b) $\int_x^4 \sqrt{t^6 + 2} dt$
- (d) $\int_x^{2x+1} \cos(\theta^2) d\theta$

8. Tentukan interval kemonotonan, interval kecekungan, titik kritis, dan absis titik belok dari fungsi $F(x) = \int_0^{2x-4} \frac{t}{4 + t^2} dt$.

9. Tentukan fungsi kontinu f (jika ada) yang memenuhi

- (a) $\int_1^x f(t) dt = x^2 - 5x + 4$,
- (b) $\int_0^{2x} f(t) dt = 8x^2 + \sin(6x)$,
- (c) $\int_2^x f(t) dt = x$.

10. Gunakan Teorema Dasar Kalkulus Kedua untuk menghitung integral tentu berikut.

- (a) $\int_0^1 (1 - x^2) dx$
- (c) $\int_1^2 \left(\frac{x^5 - 2}{x^{3/2}} \right) dx$
- (b) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin x dx$
- (d) $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + 1) dx$

11. Gunakan metode substitusi untuk menentukan integral tentu berikut.

(a) $\int_0^3 (3x + 1)^6 dx$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4\theta) d\theta$

(b) $\int_1^3 \frac{2x + 1}{(x^2 + x)^4} dx$

(e) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt$

(c) $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

(f) $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} t \sec^2(t^2) dt$

12. Suatu benda bergerak pada sumbu- x dengan kecepatan gerak

$$v(t) = \begin{cases} 5, & \text{jika } 0 \leq t \leq 10 \\ 6 - \frac{t}{10}, & \text{jika } 10 < t \leq 70 \\ -1, & \text{jika } 70 < t < 300. \end{cases}$$

Posisi awal benda adalah di titik asal.

(a) Tentukan jarak yang ditempuh benda dari $t = 10$ sampai dengan $t = 60$.

(b) Tentukan jarak terjauh dari titik asal yang dapat dicapai benda tersebut.

(c) Kapan benda tersebut kembali ke titik asal?

13. Tentukan nilai rata-rata dari fungsi berikut pada interval $[-1, 2]$.

(a) $f(x) = x^3 - x$

(c) $h(x) = x + |x|$

(b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(d) $p(x) = \sin(\pi x)$

14. Temperatur T (dalam derajat Fahrenheit) sebuah ruangan saat menit ke- t adalah

$$T = 85 - 3\sqrt{25 - t}, \quad \text{untuk } 0 \leq t \leq 16.$$

Tentukan temperatur rata-rata ruangan tersebut untuk $0 \leq t \leq 16$ dan tentukan suatu t_1 sehingga temperatur saat t_1 sama dengan temperatur rata-rata.

15. Tentukan semua nilai c yang memenuhi Teorema Rata-rata untuk Integral pada interval yang diberikan

(a) $f(x) = 1 - x; [-4, 3]$

(b) $g(x) = x(1 - x); [0, 1]$

(c) $h(x) = \cos(2x); [0, \pi]$

16. Gunakan kesimetrian fungsi untuk mempermudah perhitungan integral berikut

(a) $\int_{-1}^1 (x + x^4 + x^{5/3}) dx$

(b) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} |x| \tan x dx$

(c) $\int_{-2}^2 (x^3 + 1) \sqrt{4 - x^2} dx$

17. Gunakan keperiodikan fungsi untuk menghitung integral berikut.

(a) $\int_0^{4\pi} |\cos x| dx$

(c) $\int_1^{1+\pi} |\sin x| dx$

(b) $\int_0^{50\pi} |\sin(2x)| dx$

(d) $\int_2^{2+100\pi} |\cos x| dx$

Petunjuk: Untuk (c), tulis sebagai $\int_1^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{1+\pi} |\sin x| dx$

18. Diketahui suatu lahan di tepi danau sebagai berikut.

Taksir luas lahan tersebut menggunakan jumlah Riemann kanan, Riemann kiri, dan aturan trapesium.

19. Gunakan jumlah Riemann kanan, aturan trapesium, dan aturan parabola dengan $n = 6$ untuk menaksir nilai integral tentu berikut. Tentukan juga suatu batas yang baik untuk galat mutlak dari taksiran yang diperoleh.

(a) $\int_1^{5/2} \frac{1}{x} dx$

(c) $\int_1^4 (x^2 + 1) dx$

(b) $\int_0^3 \frac{2}{x^2 + 1} dx$

(d) $\int_{-2}^4 \frac{x - 1}{x + 3} dx$

20. Tentukan masing-masing nilai n untuk jumlah Riemann kanan, aturan trapesium, dan aturan parabola untuk menghampiri nilai integral tentu pada soal nomor 19 (a) dan (b) agar galat mutlak E_n memenuhi $|E_n| \leq 0,01$.

21. Kenali limit berikut sebagai integral tentu, kemudian hitunglah nilai integral tentu tersebut.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{n}{n+i}} \cdot \frac{1}{n}$

22. Taksir nilai dari $\int_1^{1,01} \frac{1}{t} dt$ dengan menggunakan hampiran linear dari $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

2